

**№6 Интерполяция и аппроксимация функций заданных таблично****Дано:**

|          |   |    |   |   |
|----------|---|----|---|---|
| x        | 1 | 2  | 3 | 4 |
| y = f(x) | 1 | 10 | 2 | 1 |

**Решение:****а) Построить интерполяционный полином Лагранжа для заданной функции**

$$L(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} \cdot 1 + \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} \cdot 10 + \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} \cdot 2 + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} \cdot 1$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$L(x) = \frac{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}{-6} + \frac{x^3 - 8x^2 + 19x - 12}{2} \cdot 10 + \frac{x^3 - 7x^2 + 14x - 8}{-2} \cdot 2 + \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{6}$$

$$L(x) = 4x^3 - 32.5x^2 + 78.5x - 49$$

**б) Построить интерполяционную формулу Ньютона**

Построим таблицу конечных разностей, пользуясь формулами:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$$

$$\Delta y_2 = y_3 - y_2$$

| № точки | x | y = f(x) | $\Delta y$ | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3 y$ |
|---------|---|----------|------------|--------------|--------------|
| 0       | 1 | 1        | 9          | -17          | 24           |
| 1       | 2 | 10       | -8         | 7            |              |
| 2       | 3 | 2        | -1         |              |              |
| 3       | 4 | 1        |            |              |              |

Пользуясь таблицей, запишем интерполяционную формулу Ньютона:

$$P(x) = \frac{y_0}{h^0 \cdot 0!} + \frac{\Delta y_0}{h \cdot 1!} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{h^2 \cdot 2!} (x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{h^3 \cdot 3!} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \text{ где}$$

$$h = x_1 - x_0$$

$$P(x) = \frac{1}{1^0 \cdot 0!} + \frac{9}{1 \cdot 1!} (x - 1) + \frac{-17}{1^2 \cdot 2!} (x - 1)(x - 2) + \frac{24}{1^3 \cdot 3!} (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$P(x) = 1 + 9(x - 1) - 8.5(x^2 - 3x + 2) + 4(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$$

$$P(x) = 4x^3 - 32.5x^2 + 78.5x - 49$$

**в) Аппроксимировать функцию полиномами 1-го и 2-го порядка по методу наименьших квадратов**

Будем искать аппроксимирующий полином 2-го порядка в виде:

$$g_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Неизвестные коэффициенты  $a_0, a_1, a_2$  определяются из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} s_0a_0 + s_1a_1 + s_2a_2 = t_0 \\ s_1a_0 + s_2a_1 + s_3a_2 = t_1 \\ s_2a_0 + s_3a_1 + s_4a_2 = t_2 \end{cases}$$

Соответственно аппроксимирующий полином 1-го порядка будем искать в виде:

$$g_1(x) = a_1x + a_0$$

Неизвестные коэффициенты  $a_0, a_1$  определяются из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} s_0a_0 + s_1a_1 = t_0 \\ s_1a_0 + s_2a_1 = t_1 \end{cases}$$

Параметры системы определяются формулами:

$$s_0 = x_0^0 + x_1^0 + x_2^0 + x_3^0$$

$$s_1 = x_0^1 + x_1^1 + x_2^1 + x_3^1$$

$$s_2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$s_3 = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$$

$$s_4 = x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$$

$$t_0 = y_0 \cdot x_0^0 + y_1 \cdot x_1^0 + y_2 \cdot x_2^0 + y_3 \cdot x_3^0$$

$$t_1 = y_0 \cdot x_0^1 + y_1 \cdot x_1^1 + y_2 \cdot x_2^1 + y_3 \cdot x_3^1$$

$$t_2 = y_0 \cdot x_0^2 + y_1 \cdot x_1^2 + y_2 \cdot x_2^2 + y_3 \cdot x_3^2$$

Для составления систем для определения неизвестных коэффициентов аппроксимирующих полиномов составим таблицу:

| № точки  | $x^0$    | $x^1$     | $x^2$     | $x^3$      | $x^4$      | $y \cdot x^0$ | $y \cdot x^1$ | $y \cdot x^2$ |
|----------|----------|-----------|-----------|------------|------------|---------------|---------------|---------------|
| 0        | 1        | 1         | 1         | 1          | 1          | 1             | 1             | 1             |
| 1        | 1        | 2         | 4         | 8          | 16         | 10            | 20            | 40            |
| 2        | 1        | 3         | 9         | 27         | 81         | 2             | 6             | 18            |
| 3        | 1        | 4         | 16        | 64         | 256        | 1             | 4             | 16            |
|          | $s_0$    | $s_1$     | $s_2$     | $s_3$      | $s_4$      | $t_0$         | $t_1$         | $t_2$         |
| $\Sigma$ | <b>4</b> | <b>10</b> | <b>30</b> | <b>100</b> | <b>354</b> | <b>14</b>     | <b>31</b>     | <b>75</b>     |

Запишем систему для определения коэффициентов аппроксимирующего полинома 2-го порядка:

$$\begin{cases} 4a_0 + 10a_1 + 20a_2 = 14 \\ 10a_0 + 30a_1 + 100a_2 = 31 \\ 30a_0 + 100a_1 + 354a_2 = 75 \end{cases}$$

Найдем решение системы по методу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 10 & 20 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{vmatrix} = 80,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 14 & 10 & 20 \\ 31 & 30 & 100 \\ 75 & 100 & 354 \end{vmatrix} = -560, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 14 & 20 \\ 10 & 31 & 100 \\ 30 & 75 & 354 \end{vmatrix} = 936, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 10 & 14 \\ 10 & 30 & 31 \\ 30 & 100 & 75 \end{vmatrix} = -200$$

Тогда запишем значения коэффициентов:

$$a_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-560}{80} = -7, \quad a_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{936}{80} = 11.7, \quad a_2 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-200}{80} = -2.5$$

$$g_2(x) = -2.5x^2 + 11.7x - 7$$

Аналогично, запишем систему для определения коэффициентов аппроксимирующего полинома 1-го порядка:

$$\begin{cases} 4a_0 + 10a_1 = 14 \\ 10a_0 + 30a_1 = 31 \end{cases}$$

Найдем решение системы по методу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{vmatrix} = 20, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 14 & 10 \\ 31 & 30 \end{vmatrix} = 110, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 14 \\ 10 & 31 \end{vmatrix} = -16,$$

Тогда запишем значения коэффициентов:

$$a_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{110}{20} = 5.5, \quad a_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-16}{20} = -0.8$$

$$g_1(x) = -0.8x + 5.5$$

На чертеже представлены интерполяционные полиномы Лагранжа  $L(x)$  и Ньютона  $P(x)$ , а также аппроксимирующие полиномы  $g_1(x)$  и  $g_2(x)$ .

